Jednodušší příklady na vyšetřování funkcí, definovaných implicitně – viz příklady : funkce více proměnných 2

Funkce definované implicitně – další příklady

Implicitní funkce dvou proměnných.

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z=f(x,y)$, která má v okolí bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace druhého řádu.
   Pak určete totální diferenciál funkce f v bodě (x_0,y_0) (a zatím parciální derivace druhého řádu, později i diferenciál druhého řádu), když
   a) $F(x,y,z)=z^3-2xz+y$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$;
   b) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz-4$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,2)$;
   c) $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\log\frac{z}{y}$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,1)$;
   d) $F(x,y,z)=e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2$; $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$.

2. (i) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x,y,z)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.
   (ii) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (x_0,y_0,z_0) k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$, když
   a) $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$;
   b) $F(x,y,z)=x\sin z+y\cos z-e^z$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,0)$.

3. Rozhodněte, kdy je rovnicí $G(x,y,z)=0$ definována implicitní funkce $z=g(x,y)$, je-li $G(x,y,z)=F(\frac{y}{x},\frac{z}{y})$. Ukažte, že potom platí $x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=g$.

Soustavy implicitně definovaných funkcí.

1. Ukažte, že soustavou rovnic
$$\begin{aligned} x^2+y^2&=z \\ x+y+z&=2 \qquad (*) \end{aligned}$$
   jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,2)$ definovány implicitně funkce $y=f(x)$, $z=g(x)$.
   Určete $f'(-1)$ a $g'(-1)$ a tečný vektor ke křivce, dané rovnicemi (*), v bodě $(-1,1,2)$.

2. Ukažte, že soustavou rovnic
$$\begin{aligned} x^3+y^3-z^3&=10 \\ x+y+z&=0 \end{aligned}$$
   jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,-2)$ definovány implicitně funkce $y=f(x)$, $z=g(x)$.
   Najděte aproximace funkcí f, g v okolí bodu $x_0=1$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

3. Ukažte, že soustavou rovnic
$$\begin{aligned} x+y-2u^2+v^2&=0 \\ x-y-uv&=0 \end{aligned}$$
   jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$ definovány implicitně funkce $u=f_1(x,y)$, $v=f_2(x,y)$.
   Určete totální diferenciál zobrazení $f=(f_1,f_2)$ v bodě $(1,0)$.